Métodos de Prueba en el Cálculo Proposicional

Autopsia de un Examen de *CI2511: Lógica Simbólica*

Carolina Chang
Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
cchang@usb.ve

**** **Observación:** esta versión es un borrador que puede contener errores. Debe ser utilizada con precaución. ****

20 de Noviembre de 2011, Versión 1.2.0 [1] [2]

Esta guía se basa en la suposición de que el lector ya conoce el enfoque de Cálculo Proposicional presentado en *Gries y Schneider(1993): "A Logical Approach to Discrete Math", Springer*. El alcance de estas notas consiste en ilustrar cómo utilizar los axiomas y teoremas de la Lógica Proposicional para realizar demostraciones por distintos métodos de prueba. Para ello analizo el examen Septiembre-Diciembre 2011, combinando demostraciones formales con explicaciones informales, en espera que estos ejemplos sirvan de ayuda a mis estudiantes de *CI2511: Lógica Simbólica*.

Cabe destacar que esta guía sólo ilustra algunas formas de abordar y presentar demostraciones en Cálculo Proposicional, y que de ninguna manera pretende descartar otros estilos o enfoques.

Parte I

Examen Septiembre-Diciembre 2011

En todo el examen Septiembre-Diciembre 2011 se podía usar simetrías, asociatividades y doble negación de manera implícita (es decir, se podía usar estos axiomas y teoremas combinados con otros teoremas y sin necesidad de especificar las sustituciones textuales utilizadas). En esta guía adicionalmente utilizaré la Monotonía de la Conjunción de manera implícita.

1. Pregunta 0: Zombiexam

Se desea que Usted analice un argumento en lenguaje natural y que, una vez obtenida alguna conclusión en ese argumento, muestre que su razonamiento es correcto haciendo uso del cálculo proposicional.

Las tres premisas del argumento en cuestión, son las siguiente:

> *El lunes fue halloween y los zombies me mordieron. Si el lunes fue halloween y yo no razono, entonces no es cierto que los zombies me mordieron. Es necesario para que yo sea zombie que yo no razone.*

---

[2] Agradezco el apoyo de Juan Manuel De Olival, quien (siendo estudiante de *CI2511: Lógica Simbólica* para el momento en que realicé esta guía) contribuyó por iniciativa propia y de manera entusiasta a depurarla y mejorarla rápidamente. Estudiantes como él enaltecen el trabajo de un docente.

Las posibles conclusiones del argumento en cuestión son:

$C0 \sim$ *Yo soy zombie.*
$C1 \sim$ *Yo no soy zombie.*

Usted deberá:

(a) Modelar como expresiones booleanas proposicionales las tres premisas dadas usando sólo las proposiciones que se dan a continuación:

$p \sim$ *El lunes es halloween.*
$q \sim$ *Los zombies me muerden.*
$r \sim$ *Yo razono.*
$s \sim$ *Yo soy zombie.*

(b) Demostrar haciendo uso del cálculo proposicional que su razonamiento es correcto. Esto es, luego de que Usted escoja la conclusión adecuada C, deberá demostrar que $H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow C$ es un teorema, siendo $H0$, $H1$ y $H2$ las tres expresiones propuestas por Ud. en la parte **(a)**. Puede hacer uso de los métodos de prueba que Usted considere conveniente.

1.1. Modelo

H0: $p \wedge q$
H1: $p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$
H2: $s \Rightarrow \neg r$

Recordemos que:

Oración	Expresión Booleana
p es suficiente para q	$p \Rightarrow q$
p es necesario para q	$p \Leftarrow q$
A menos que p, q	$\neg p \Rightarrow q$

En el examen, la única oración que resultó difícil de modelar para algunos fue $H2$.

Si analizamos la estructura de la oración vemos que dice: es necesario para s que $\neg r$. Esto es lo mismo que decir: para s es necesario $\neg r$, por lo que la expresión es una implicación. La condición necesaria $\neg r$ es la consecuencia en la expresión $H2$ (así como en la tabla, la condición necesaria p es la consecuencia en la expresión *"p es necesario para q"*).

Noten que la afirmación *"p es necesario para q"* es falsa únicamente en el caso en que p es falso y q es verdadero (pues significaría que no era cierto que se requería p para q). De allí que la expresión se modela como una consecuencia.

1.2. Demostración

El estudiante tenía la libertad de resolver la parte (b) de la pregunta por cualquier método. Sin embargo, aprovecho esta pregunta para dar un repaso a la mayoría los métodos de prueba. Tengan en cuenta que la pregunta del examen pedía hacer sólo una demostración.

Noten que no es necesario escoger una conclusión *a priori*. Nuestro razonamiento puede conducirnos a la conclusión correcta.

Razonamiento informal:

Puedo usar tanto p como q de $H0$ para aplicar Modus Ponens o (3.66) a expresiones de implicación que los tenga como antecedentes. $H1$ tiene a p en el antecedente, pero para aplicar Modus Ponens o (3.66) necesito $\neg r$, que no lo tengo como hecho en ninguna hipótesis. Haciendo Shunting de $\neg r$ en $H1$ puedo combinar $H1$ con p, para aplicar Modus Ponens o (3.66) para obtener $(\neg r \Rightarrow \neg q)$. Puedo aplicar Contrarrecíproco a esa expresión y usarla con q de $H0$ para deducir r. Con r y el Contrarecíproco de $H2$ concluyo $\neg s$.

Por lo tanto concluyo $C1$ y procedo a demostrar:

$$H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow \neg s$$

es decir, el objetivo es demostrar:

$$p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s \tag{1}$$

Es importante recordar colocar los paréntesis que sean necesarios para respetar la precedencia de los operadores. Como la conjunción tiene mayor precedencia que la implicación, coloco paréntesis a $H1$ y $H2$, de modo de preservar el sentido del argumento.

Aunque el examen pedía una sola demostración, en esta Autopsia exploraremos distintos métodos de prueba que permiten demostrar el teorema. En las pruebas formales de esta sección nos guiaremos por el razonamiento informal anterior, aunque existen diversos razonamientos que permiten concluir $\neg s$. Queda a los lectores realizar las demostraciones siguiendo otras líneas de razonamiento.

1.2.1. Prueba por el Método Directo

Recordemos que el objetivo es partir de toda la Expresión Booleana (1):
$p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

y llegar a un axioma o teorema conocido por medio de equivalencias.

Prueba:

$p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle$Shunting $\text{con}\, q, r := \neg r, \neg q;$ Asoc.$\wedge$; Sim.$\wedge$ $\rangle$

$p \wedge (p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle(3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, q := \neg r \Rightarrow \neg q\rangle$

$p \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle$Contrarrecíproco $\text{con}\, p, q := q, r;$ Asoc.$\wedge$; Sim.$\wedge$ $\rangle$

$p \wedge q \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle(3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, p, q := q, r\rangle$

$p \wedge q \wedge r \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle$Contrarrecíproco $\text{con}\, p, q := s, \neg r;$ Doble Neg. $\rangle$

$p \wedge q \wedge r \wedge (r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow \neg s$

$\equiv$ $\langle$Asoc.$\wedge$; $(3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, p, q := r, \neg s;$ Sim.$\wedge$ $\rangle$

$\neg s \wedge p \wedge q \wedge r \Rightarrow \neg s$ — (3.76b) con $p, q := \neg s, p \wedge q \wedge r$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Subexpresiones del tipo $p \wedge (p \Rightarrow q)$ deben saltar a nuestra vista pues permiten el uso de los teoremas (3.66) y Modus Ponens.
- Shunting permite pasar al consecuente una subexpresión que necesitaríamos para aplicar (3.66), pero que no tenemos. En este caso pasamos $\neg r$ al consecuente, pues así es posible aplicar (3.66) utlizando p y la expresión resultante del Shunting.
- A diferencia de Modus Ponens, (3.66) permite que la demostración se mantenga en equivalencias, cosa que es necesaria en el método directo.
- Subexpresiones del tipo $p \wedge (q \Rightarrow \neg p)$ deben saltar a nuestra vista, pues con Contrarreciproco permiten el uso de los teoremas (3.66) y Modus Ponens.
- Las demostraciones de expresiones de implicación por el método directo con frecuencia finalizan con el teorema de debilitamiento/fortalecimiento, en este caso con (3.76b).

1.2.2. Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento

Prueba partiendo del Antecedente

$$
\begin{array}{ll}
 & p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con } q, r := \neg r, \neg q;\ \text{Asoc.} \wedge \text{ ; Sim.} \wedge \ \rangle \\
 & p \wedge (p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } q := (\neg r \Rightarrow \neg q);\ \text{Monotonía} \wedge \ \rangle \\
 & (\neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := q, r;\ \text{Sim.} \wedge \ \rangle \\
 & q \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := q, r;\ \text{Monotonía} \wedge \ \rangle \\
 & r \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := s, \neg r;\ \text{Doble Neg.} \ \rangle \\
 & r \wedge (r \Rightarrow \neg s) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := r, \neg s \rangle \\
 & \neg s
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Cuando en el antecedente hay subexpresiones que permiten la aplicación de (3.66) o Modus Ponens, las pruebas por debilitamiento suelen ser muy parecidas a las del método directo.
- Shunting permite pasar al consecuente una subexpresión que necesitaríamos para aplicar Modus Ponens, pero que no tenemos. En este caso pasamos $\neg r$ al consecuente, pues así es posible aplicar Modus Ponens utilizando p y la expresión resultante del Shunting.
- Modus Ponens permite debilitar la expresión, eliminando subexpresiones que ya no necesitamos usar en el resto de la prueba, simplificando la expresión y produciendo los pasos de implicación necesarios en un prueba de este tipo.
- Al aplicar Modus Ponens sobre una subexpresión, si ésta es un operando de una conjunción o una disyunción, los teoremas de Monotonía garantizan que la implicación se mantiene. En esta prueba encontramos dos aplicaciones de Modus Ponens con Monotonía de la Conjunción.
- Contrarecíproco permite la posterior aplicación de Modus Ponens a expresiones del tipo $p \wedge (q \Rightarrow \neg p)$.
- Las demostraciones por el método abreviado deben partir del antecedente y llegar al consecuente de la expresión, utilizando pasos de equivalencia y de implicación.

1.2.3. Prueba Suponiendo el Antecedente para estructurar la Demostración

Las demostraciones por este método son muy similares a las demostraciones por el método abreviado debilitamiento. Suponer que las premisas son *true* permite reducir el tamaño de la expresión a manipular, al poder introducir las hipótesis sólo en el momento en que sean necesarias. Noten que si utilizásemos todas las hipótesis desde el inicio de la prueba, estaríamos justamente en la prueba por debilitamiento anterior (subsección 1.2.2).

Supongo $H0 : p \wedge q \equiv true$
$H1 : p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q \equiv true$
$H2 : s \Rightarrow \neg r \equiv true$

$$
\begin{array}{ll}
 & p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \text{ — } H0 \wedge H1 \\
\equiv & \qquad \langle \text{Asoc.} \wedge \text{ ; Sim.} \wedge \text{ ; Shunting con } q, r := \neg r, \neg q \rangle \\
 & p \wedge (p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)) \wedge q \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{Modus Ponens con } q := (\neg r \Rightarrow \neg q);\ \text{Monotonía} \wedge \rangle \\
 & (\neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \\
\equiv & \qquad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := q, r;\ \text{Sim.} \wedge \rangle \\
 & q \wedge (q \Rightarrow r) \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := q, r \rangle \\
 & r \\
\equiv & \qquad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := r \rangle \\
 & r \wedge true \\
\equiv & \qquad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & r \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := s, \neg r;\ \text{Doble Neg.} \rangle \\
 & r \wedge (r \Rightarrow \neg s) \\
\Rightarrow & \qquad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := r, \neg s \rangle \\
 & \neg s
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow \neg s$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- Shunting permite pasar al consecuente una subexpresión que necesitaríamos para aplicar Modus Ponens, pero que no tenemos. En este caso pasamos $\neg r$ al consecuente, pues así es posible aplicar Modus Ponens utilizando p y la expresión resultante del Shunting.
- Modus Ponens permite debilitar la expresión, eliminando subexpresiones que ya no necesitamos usar en el resto de la prueba.
- Al aplicar Modus Ponens sobre una subexpresión, si ésta es un operando de una conjunción o una disyunción, los teoremas de Monotonía garantizan que la implicación se mantiene. En esta prueba, realizamos el primer Modus Ponens combinado con Monotonía de la Conjunción.

- Contrarecíproco permite la posterior aplicación de Modus Ponens a expresiones del tipo $p \wedge (q \Rightarrow \neg p)$.
- Luego de suponer el antecedente, la demostración puede realizarse por cualquier método de prueba. Aquí partimos de una hipótesis hasta llegar a la conclusión por debilitamiento.
- Como las hipótesis se suponen *true*, puedo partir de cualquiera de ellas o de varias para hacer la demostración. El Metateorema de Separación de Conjunciones también es útil para hacer conjunciones de teoremas.

No olvidemos que:

- Una demostración que utilice Modus Ponens o (3.66) suele ser más directa, legible y elegante que una prueba basada en traducciones de implicación. Por lo tanto, debemos intentar alcanzar expresiones del tipo $p \wedge (p \Rightarrow q)$.

1.2.4. Prueba Suponiendo el Antecedente para sustituir Hipótesis por true

Prueba:

Supongo $H0 : p \wedge q \equiv true$
$H1 : p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q \equiv true$
$H2 : s \Rightarrow \neg r \equiv true$

$$
\begin{array}{ll}
 & p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q \text{ — } H1 \\
\equiv & \quad \langle \text{MetaT. Separación de } \wedge \ de\ H0 : (p \equiv true)\ y\ (q \equiv true) \rangle \\
 & true \wedge \neg r \Rightarrow \neg true \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro } \wedge \text{ con } p := \neg r \rangle \\
 & \neg r \Rightarrow \neg true \\
\equiv & \quad \langle \text{Definición de } false \rangle \\
 & \neg r \Rightarrow false \\
\equiv & \quad \langle (4.9)\ \neg p \Rightarrow false \equiv p \text{ con } p := r \rangle \\
 & r \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro } \wedge \text{ con } p := r \rangle \\
 & r \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & r \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := s, \neg r; \text{ Doble Neg. } \rangle \\
 & r \wedge (r \Rightarrow \neg s) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := r, \neg s \rangle \\
 & \neg s
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow \neg s$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Las demostraciones por este método aprovechan al máximo el Metateorema de Deducción Extendido (MDE) para lograr pruebas muy simples basadas en la sustitución las hipótesis por *true*. Algunas personas se limitan a aprender este método, pero éste suele resultar insuficiente para lograr el éxito en nuestro curso.
- El Metateorema de Separación de Conjunciones permite utilizar subexpresiones de las hipótesis que están unidas por conjunción, para utilizarlas separadamente como *true*.

1.2.5. Prueba Por Contradicción

En lugar de demostrar la Expresión Booleana (1):

$$p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$$

demostraremos (por Contradicción):

$$\neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s) \Rightarrow false \tag{2}$$

Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento:

$\quad \neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s)$
$\equiv \quad \langle$(3.59) Def. Alt.Implic. con $p, q := p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r), \neg s\rangle$
$\quad \neg(\neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \vee \neg s)$
$\equiv \quad \langle$De Morgan con $p, q := \neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)), \neg s;$ Doble Neg. ; Asoc.$\wedge\ \rangle$
$\quad p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \wedge s$
$\Rightarrow \quad \langle$Asoc.$\wedge$; Sim.$\wedge$; Modus Ponens con $p, q := s, \neg r;$ Monotonía$\wedge\ \rangle$
$\quad p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge \neg r$
$\equiv \quad \langle$Sim.$\wedge$; Asoc.$\wedge\ \rangle$
$\quad p \wedge \neg r \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q$
$\Rightarrow \quad \langle$Modus Ponens con $p, q := p \wedge \neg r, \neg q;$ Monotonía$\wedge\ \rangle$
$\quad \neg q \wedge q$
$\equiv \quad \langle$Sim.$\wedge$; Contradicción con $p := q\rangle$
$\quad false$

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- En una prueba por contradicción se debe negar toda la expresión.
- El uso de (3.59) Definición Alterna de Implicación puede ser apropiado para implicaciones negadas. Por ejemplo $\neg(p \Rightarrow q)$ se transforma con (3.59) y De Morgan en $p \wedge \neg q$. Expresiones en conjunción suelen ser útiles para (3.66) o Modus Ponens.
- Al aplicar Modus Ponens sobre una subexpresión, si ésta es un operando de una conjunción o una disyunción, los teoremas de Monotonía garantizan que la implicación se mantiene. En esta prueba utilizamos la Monotonía de la Conjunción.

1.2.6. Prueba Suponiendo el Antecedente para estructurar la Demostración, y Contradicción para demostrar el Consecuente (Reducción al Absurdo)

Supongo $H0 : p \wedge q \equiv true$
$H1 : p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q \equiv true$
$H2 : s \Rightarrow \neg r \equiv true$

Por Contradicción

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\neg s \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. } \rangle \\
 & s \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := s \rangle \\
 & s \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & s \wedge (s \Rightarrow \neg r) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := s, \neg r \rangle \\
 & \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := \neg r \rangle \\
 & \neg r \wedge true \\
\equiv & \quad \langle \text{MetaT. Separación de} \wedge : H0 \wedge H1 \equiv true \rangle \\
 & \neg r \wedge p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \wedge ;\ \text{Asoc.} \wedge \rangle \\
 & p \wedge \neg r \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := p \wedge \neg r, \neg q;\ \text{Monotonía} \wedge \rangle \\
 & \neg q \wedge q \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \wedge ;\ \text{Contradicción con } p := q \rangle \\
 & false
\end{array}
$$

$\therefore \neg s$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow \neg s$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- En una prueba de este tipo se supone que el antecedente es $true$ y se comienza la demostración partiendo del negado de la conclusión (en nuestro caso, comenzamos con $\neg\neg s$). Al llegar a $false$ hemos demostrado la conclusión original (en nuestro caso, $\neg s$).
- El Metateorema de Separación de Conjunciones sirve tanto para separar como para unir teoremas. Su uso no es relevante en esta demostración pero permite introducir dos hipótesis a la vez y acortar la prueba.
- Al aplicar Modus Ponens sobre una subexpresión, si ésta es un operando de una conjunción o una disyunción, los teoremas de Monotonía garantizan que la implicación se mantiene. En esta prueba utilizamos la Monotonía de la Conjunción.

1.2.7. Prueba Suponiendo el Antecedente para sustituir Hipótesis por true, y Contradicción para demostrar el Consecuente (Reducción al Absurdo)

Supongo $H0 : p \wedge q \equiv true$
$H1 : p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q \equiv true$
$H2 : s \Rightarrow \neg r \equiv true$

Por Contradicción

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\neg s \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. } \rangle \\
 & s \\
\Rightarrow & \quad \langle H2 \rangle \\
 & \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro } \wedge \text{ con } p := \neg r \rangle \\
 & \neg r \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & \neg r \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{MetaT. Separación de } \wedge\ H0 : (p \equiv true)\ y\ (q \equiv true) \rangle \\
 & \neg r \wedge (true \wedge \neg r \Rightarrow \neg true) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro } \wedge \text{ con } p := \neg r \rangle \\
 & \neg r \wedge (\neg r \Rightarrow \neg true) \\
\equiv & \quad \langle \text{Definición de } false \rangle \\
 & \neg r \wedge (\neg r \Rightarrow false) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := \neg r, false \rangle \\
 & false
\end{array}
$$

$\therefore \neg s$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \Rightarrow \neg s$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Las demostraciones por este método aprovechan al máximo el Metateorema de Deducción Extendido (MDE) para lograr pruebas muy simples basadas en la sustitución las hipótesis por $true$. Algunas personas se limitan a aprender este método, pero éste suele resultar insuficiente para lograr el éxito en nuestro curso.
- En una prueba de este tipo se supone que las hipótesis son $true$ y se comieza la demostración partiendo del negado de la conclusión (en nuestro caso, comenzamos con $\neg\neg s$). Al llegar a $false$ hemos demostrado la conclusión original (en nuestro caso, $\neg s$).
- Las hipótesis de implicación como $H2$ se pueden utilizar directamente, como cualquier teorema de debilitamiento/fortalecimiento.
- El Metateorema de Separación de Conjunciones permite utilizar subexpresiones de las hipótesis que están unidas por conjunción, para sustituirlas separadamente como $true$.

1.2.8. Prueba Por Contrarrecíproco

En lugar de demostrar la Expresión Booleana (1):

$$p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg s$$

demostraremos (por Contrarrecíproco):

$$\neg\neg s \Rightarrow \neg((p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \tag{3}$$

(a) Prueba por el Método Directo

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg((p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. ; Asoc.}\wedge\text{ ; De Morgan con } p, q := (p \wedge q), ((p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \rangle \\
 & s \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg((p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q), (s \Rightarrow \neg r) \rangle \\
 & s \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.}\vee\text{ ; (3.59) Def. Alt.Implic. con } p, q := (s \Rightarrow \neg r), \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \rangle \\
 & s \Rightarrow ((s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con } p, q, r := s, (s \Rightarrow \neg r), \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \rangle \\
 & s \wedge (s \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{(3.66) } p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := s, \neg r \rangle \\
 & s \wedge \neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{(3.59) Def. Alt.Implic. con } p, q := (p \wedge \neg r), \neg q \rangle \\
 & s \wedge \neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := \neg(p \wedge \neg r), \neg q\text{; Doble Neg.} \rangle \\
 & s \wedge \neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg r) \wedge q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.}\wedge\text{ ; Asoc.}\wedge \rangle \\
 & s \wedge \neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{(3.59) Def. Alt.Implic. con } p, q := p \wedge q, p \wedge q \wedge \neg r) \rangle \\
 & s \wedge \neg r \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow p \wedge q \wedge \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con } p, q, r := s \wedge \neg r, p \wedge q, p \wedge q \wedge \neg r\text{; Sim.}\wedge\text{ ; Asoc.}\wedge \rangle \\
 & p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \Rightarrow p \wedge q \wedge \neg r \text{ — (3.76b) con } \ p, q := p \wedge q \wedge \neg r, s
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Para el teorema a demostrar, Contrarrecíproco no es la mejor opción de método de demostración pues el consecuente de la expresión original (1) es muy simple. Sin embargo, esto no impide realizar la demostración.
- El uso del teorema (3.59) Definición Alterna de Implicación (pero para producir implicaciones a partir de disyunciones) permite simplificar la demostración y evitar tener que hacer distributivas. La implicación se produce para poder convertir la expresión a una a la cual se le pueda aplicar Shunting y (3.66).
- Las demostraciones de expresiones de implicación por el método directo con frecuencia finalizan con el teorema de debilitamiento/fortalecimiento, en este caso en (3.76b).

(b) Prueba por el Método Abreviado Fortalecimiento

Prueba partiendo del Consecuente de (3):

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Asoc.}\wedge \text{ ; De Morgan con } p, q := (p \wedge q), ((p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg((p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q), (s \Rightarrow \neg r) \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{(3.59) Def. Alt.Implic. con } p, q := p \wedge \neg r, \neg q \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q) \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := \neg(p \wedge \neg r), \neg q; \text{ Doble Neg. } \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg r) \wedge q)) \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Asoc.}\wedge \text{ ; Sim.}\wedge \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r) \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. ; Absorción con } p, q := \neg(p \wedge q), \neg r \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg r \vee \neg(s \Rightarrow \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{(3.59) Def. Alt.Implic. con } p, q := s, \neg r \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg r \vee \neg(\neg s \vee \neg r) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := \neg s, \neg r; \text{ Doble Neg. } \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg r \vee (s \wedge r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. ; Sim.}\wedge \text{ ; Absorción con } p, q := \neg r, s \rangle \\
 & \neg(p \wedge q) \vee \neg r \vee s \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Sim.}\vee \text{ ; (3.76a) Deb/Fort. con } p, q := s, \neg(p \wedge q) \vee \neg r \rangle \\
 & s \\
\equiv & \quad \langle \text{Doble Neg. } \rangle \\
 & \neg\neg s
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Al realizar esta prueba por el Método Abreviado, es preferible demostrar el teorema por fortalecimiento que por debilitamiento, porque el consecuente tiene mayor estructura que el antecedente.
- Absorción permite simplificar la expresión. El uso de Distributivas en lugar de Absorción haría más larga y complicada la prueba.
- Se buscan disyunciones en esta prueba para fortalecer con (3.76a) Deb/Fort. El uso de (3.59) Definición Alterna de Implicación permite obtener disyunciones para tal fin.

(c) Prueba por el Método Abreviado Fortalecimiento y Usando Metateorema General de Monotonía (Metateorema de Paridad)

Aunque el consecuente de (3) es una expresión negada, no significa que haya que hacer la prueba comenzando por De Morgan. El Metateorema de Paridad nos permite hacer una demostración más sencilla.

Prueba partiendo del Consecuente:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con } q, r := \neg r, \neg q;\ \text{Asoc.} \wedge\ ;\ \text{Sim.} \wedge\ \rangle \\
 & \neg(p \wedge (p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } q := (\neg r \Rightarrow \neg q);\ \text{Monotonía} \wedge\ ;\ \text{Paridad impar} \rangle \\
 & \neg((\neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := q, r;\ \text{Sim.} \wedge\ \rangle \\
 & \neg(q \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := q, r;\ \text{Monotonía} \wedge\ ;\ \text{Paridad impar} \rangle \\
 & \neg(r \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := s, \neg r;\ \text{Doble Neg.}\ \rangle \\
 & \neg(r \wedge (r \Rightarrow \neg s)) \\
\Leftarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := r, \neg s;\ \text{Paridad impar} \rangle \\
 & \neg\neg s
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta demostración:

- En lugar de hacer las pruebas anteriores de Contrarrecíproco (subsecciones 1.2.8 (a) y (b)), podemos hacer demostraciones más elegantes y sencillas si comprendemos el Metateorema de Paridad.
- La demostración se reduce a hacer la misma prueba del Método Abreviado Debilitamiento (subsección 1.2.2), pero al estar la expresión dentro del alcance una negación, la paridad es impar, produciendo consecuencias en los pasos de Modus Ponens. Justamente ésto es lo que se busca obtener en una prueba por Fortalecimiento.

(d) Prueba por el Método Directo Sin comenzar por De Morgan

La demostración anterior (subsección 1.2.8(c)) nos debe hacer pensar que se debe poder hacer la prueba por el método directo de la expresión Booleana (3) de una manera más sencilla. Entonces, en vez de hacer el paso casi automático de De Morgan, podemos pensar en hacer pasos de (3.66) en el consecuente, dentro de la negación. Como se trata de una prueba por equivalencias, se usa (3.66) en lugar de Modus Ponens, y por tanto no hay que preocuparse por la paridad de la expresión.

Prueba:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge q \wedge (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con}\, q, r := \neg r, \neg q;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge (p \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg q)) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, q := \neg r \Rightarrow \neg q \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \wedge q \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con}\, p, q := q, r;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge (q \wedge (q \Rightarrow r)) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, p, q := q, r \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge (q \wedge r) \wedge (s \Rightarrow \neg r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con}\, p, q := s, \neg r;\ \text{Doble Neg.}\ ;\ \text{Asoc.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(p \wedge q \wedge (r \wedge (r \Rightarrow \neg s))) \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q\ \ \text{con}\, p, q := r, \neg s;\ \text{Asoc.}\wedge\ ;\ \text{Sim.}\wedge\ \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg(\neg s \wedge (p \wedge q \wedge r)) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con}\ p, q := \neg s, (p \wedge q \wedge r) \rangle \\
 & \neg\neg s \Rightarrow \neg\neg s \vee \neg(p \wedge q \wedge r) \text{ — (3.76a) Debilitamiento con p, q:= } \neg\neg s, \neg(p \wedge q \wedge r)
\end{array}
$$

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- La demostración resulta más elegante y sencilla que la realizada inicialmente comenzando con De Morgan (subsección1.2.8(a)). Los teoremas de equivalencia se pueden utilizar sin ningún inconveniente dentro de negaciones.
- La dificultad de una demostración a veces es consecuencia de decisiones inadecuadas tomadas por la persona que la realiza.
- Las demostraciones de expresiones de implicación por el método directo con frecuencia finalizan con el teorema de debilitamiento/fortalecimiento, en este caso con (3.76a).
- La prueba por Contradicción de la subsección (1.2.5) pudo haberse realizado por este mismo método, es decir, sin aplicar De Morgan al antecedente de la expresión Booleana (2), sino realizando una prueba similar a la del método directo, dentro del alcance de la negación. Sin embargo, no tendría sentido proponer una prueba por Contradicción e ignorar la negación generada. En ese caso sería preferible realizar una prueba por el Método Directo. Lo mismo pudiese decirse de esta prueba por Contrarrecíproco y de la anterior, sin embargo, las presento aquí para ilustrar el poder del Metateorema de Paridad y la claridad del Método Directo.

2. Pregunta 1: Metateorema de Paridad

Cuando sea posible aplicar el Metateorema General de Monotonía (Metateorema de Paridad), indique la paridad de la subexpresión a sustituir (tanto en número como en par/impar) y coloque el operador correcto que relaciona las dos expresiones según el teorema indicado en la justificación. Cuando no sea posible aplicar el Metateorema, indique por qué.

- $$\begin{array}{ll} & \neg((\neg p \land (q \equiv r)) \lor r \Rightarrow t) \\ \Leftarrow & \qquad < \text{(3.76a) Fortalecimiento/Debilitamiento } (p \Rightarrow p \lor q)[p, q := \neg p \land (q \equiv r), r] > \\ & \neg(\neg p \land (q \equiv r) \Rightarrow t) \end{array}$$

  La expresión $\neg p \land (q \equiv r)$ tiene paridad par, pues se encuentra en un antecedente y y bajo el alcance de una negación. Entonces: $(\neg p \land (q \equiv r)) \lor r \Leftarrow \neg p \land (q \equiv r)$ (una aplicación estándar de (3.76a)).

- $$\begin{array}{ll} & \neg(\neg p \land (q \equiv r) \Rightarrow t) \\ ? & \qquad < \text{(3.76a) Fortalecimiento/Debilitamiento } (p \Rightarrow p \lor q)[p, q := q, r] > \\ & \neg(\neg p \land (q \lor r \equiv r) \Rightarrow t) \end{array}$$

  La expresión q es un operando de un equivalencia, por lo que el Metateorema de Paridad no se puede utilizar.

- $$\begin{array}{ll} & \neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t \land (w \Rightarrow u)) \\ \Leftarrow & \qquad < \text{(3.76a) Fortalecimiento/Debilitamiento } (p \Rightarrow p \lor q)[q := (q \equiv r)] > \\ & \neg s \Rightarrow (p \lor (q \equiv r) \Rightarrow t \land (w \Rightarrow u)) \end{array}$$

  La expresión p se encuentra en un antecedente, por lo que su paridad es impar. Entonces: $p \Leftarrow p \lor (q \equiv r)$.

3. Pregunta 2: Prueba por el Método Directo

Se desea que Usted demuestre que la siguiente expresión es un teorema:

$$(p \Rightarrow (q \vee r)) \;\wedge\; (q \;\Rightarrow\; \neg\, s) \;\;\Rightarrow\;\; (p \,\wedge\, s \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s)) \tag{4}$$

pero bajo las siguientes restricciones: (i) sólo puede usar el método de prueba directo (transformación por medio de equivalencias a *true* o a cualquier teorema ya conocido), y (ii) **No** puede utilizar las traducciones estándares de implicación (llamadas "definición de implicación" (3.57), (3.59) y (3.60) en el libro de texto), pero sí puede utilizar cualquier otro de los teoremas del libro.

3.1. Prueba por el Método Directo

$$\begin{array}{ll}
 & (p \Rightarrow (q \vee r)) \;\wedge\; (q \;\Rightarrow\; \neg\, s) \;\;\Rightarrow\;\; (p \,\wedge\, s \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s)) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Shunting con } p, q, r := (p \Rightarrow (q \vee r)) \;\wedge\; (q \;\Rightarrow\; \neg\, s), p \,\wedge\, s, (q \not\equiv r \wedge s) \rangle \\
 & (p \Rightarrow (q \vee r)) \;\wedge\; (q \;\Rightarrow\; \neg\, s) \;\;\wedge\;\; p \,\wedge\, s \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Asoc.} \wedge \,;\; \text{Sim.} \wedge \,\rangle \\
 & p \wedge (p \Rightarrow (q \vee r)) \;\wedge\; s \wedge (q \;\Rightarrow\; \neg\, s) \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle (3.66)\; p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q \text{ con } q := (q \vee r) \rangle \\
 & p \wedge (q \vee r) \;\wedge\; s \wedge (q \;\Rightarrow\; \neg\, s) \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := q, \neg s;\; \text{Doble Neg.} \,\rangle \\
 & p \wedge (q \vee r) \;\wedge\; s \wedge (s \;\Rightarrow\; \neg\, q) \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Asoc.} \wedge \,;\; (3.66)\; p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := s, \neg q \rangle \\
 & p \wedge (q \vee r) \;\wedge\; s \wedge \neg\, q \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Asoc.} \wedge \,;\; \text{Sim.} \wedge \,\rangle \\
 & \neg q \wedge (q \vee r) \wedge s \wedge p \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Doble Neg.} \,;\; \text{Absorción con } p, q := \neg q, r \rangle \\
 & \neg q \wedge r \wedge s \wedge p \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Asoc.} \wedge \,;\; (3.50)\; p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := \neg q, r \wedge s;\; \text{Sim.} \equiv \,\rangle \\
 & \neg q \wedge (\neg q \equiv r \wedge s) \wedge p \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \\
\equiv & \qquad \langle \text{Sim.} \wedge \,;\; (3.14)\; (p \not\equiv q) \equiv\; \neg p \equiv q \text{ con } p, q := q, r \wedge s;\; \text{Asoc.} \wedge \,\rangle \\
 & (q \not\equiv r \wedge s) \wedge (\neg q \wedge p) \;\Rightarrow\; (q \not\equiv r \wedge s) \;\text{ — (3.76b)Deb/Fort con } p, q := (q \not\equiv r \wedge s), \neg q \wedge p
\end{array}$$

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- El uso de definiciones de implicación se prohíbe para que la prueba sea elegante y breve.
- Shunting permite pasar al antecedentes subexpresiones para que con ellas se puede aplicar (3.66) en el antecedente (como en los ejercicios 19 y 20 de la práctica 4 de Sept-Dic 2011).
- Contrarecíproco permite la posterior aplicación de (3.66) a expresiones del tipo $p \wedge (q \Rightarrow \neg p)$.
- Absorción permite simplificar la expresión. El uso de Distributivas en lugar de Absorción haría más larga y complicada la prueba.
- (3.50) permite producir una equivalencia a partir de una conjunción.
- Las demostraciones de expresiones de implicación por el método directo con frecuencia finalizan con el teorema de debilitamiento/fortalecimiento, en este caso, en (3.76b).

3.2. EXTRA: Suponer el Antecedente para estructurar la prueba

Aunque la pregunta exigía hacer la demostración por el método directo, aprovecho la expresión Booleana (4) para mostrar otra manera de abordar esta prueba.

Supongo $H0 : p \Rightarrow (q \vee r) \equiv true$
$H1 : q \Rightarrow \neg s \equiv true$

Supongo $H2 : p \wedge s$

$p \wedge s$
$\equiv$ $\langle$Neutro$\wedge$ $\rangle$
$p \wedge true \wedge s$
$\equiv$ $\langle H0 \equiv true\rangle$
$p \wedge (p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge s$
$\Rightarrow$ $\langle$Modus Ponens con $q := q \vee r$; Monotonía$\wedge$ $\rangle$
$(q \vee r) \wedge s$
$\equiv$ $\langle$Neutro $\wedge$ con $p := (q \vee r) \wedge s\rangle$
$(q \vee r) \wedge s \wedge true$
$\equiv$ $\langle H1 \equiv true\rangle$
$(q \vee r) \wedge s \wedge (q \Rightarrow \neg s)$
$\equiv$ $\langle$Contrarrecíproco con $p, q := q, \neg s$; Doble Neg. $\rangle$
$(q \vee r) \wedge s \wedge (s \Rightarrow \neg q)$
$\equiv$ $\langle$Asoc.$\wedge$; (3.66) $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$ con $p, q := s, \neg q\rangle$
$(q \vee r) \wedge s \wedge \neg q$
$\equiv$ $\langle$Sim.$\wedge$; Asoc.$\wedge$; Doble Neg. ; Absorción con $p, q := \neg q, r\rangle$
$\neg q \wedge r \wedge s$
$\equiv$ $\langle$Asoc.$\wedge$; (3.50) $p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q$ con $p, q := \neg q, r \wedge s$; Sim. $\equiv$ $\rangle$
$\neg q \wedge (\neg q \equiv r \wedge s)$
$\Rightarrow$ $\langle$Sim.$\wedge$; (3.76b) Deb/Fort. con $p, q := (\neg q \equiv r \wedge s), \neg q\rangle$
$\neg q \equiv r \wedge s$
$\equiv$ $\langle$(3.14) $(p \not\equiv q) \equiv \neg p \equiv q$ con $p, q := q, r \wedge s\rangle$
$q \not\equiv r \wedge s$

$\therefore p \wedge s \Rightarrow (q \not\equiv r \wedge s)$ —MDE

$\therefore H0 \wedge H1 \Rightarrow (p \wedge s \Rightarrow (q \not\equiv r \wedge s))$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Esta no es la demostración que el examen pedía, es una demostración extra.
- Cuando se tiene una implicación en el consecuente, se puede volver a utilizar el método de suposición del Antecedente. Noten que hacer ésto es equivalente a haber utilizado Shunting en toda la expresión y luego suponer el antecedente.
- Se usa Modus Ponens cuando no se requiere más de la expresión del antecedente de una implicación. Se usa (3.66) cuando la expresión del antecedente es necesaria para continuar la prueba (en nuestro caso se necesita conservar a s pues es parte de la conclusión). Con frecuencia los estudiantes no pueden finalizar una demostración debido a que en algún momento debilitaron una expresión que contenía información relevante.

4. Pregunta 3: Combinando Métodos de Prueba

A partir de las siguientes premisas:

$$\begin{array}{ll} H0: & s \vee \neg w \\ H1: & \neg t \wedge s \Rightarrow r \\ H2: & p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \\ H3: & t \Rightarrow r \end{array}$$

es correcto deducir la siguiente conclusión:

$$C: \quad w \vee r$$

Se quiere que Usted demuestre que $H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow C$ es un teorema, haciendo uso del cálculo proposicional, por medio de las combinaciones de métodos de prueba que se indican a continuación:

(a) Demuestre el teorema utilizando el método de suposición de antecedente, combinado con el método de prueba por casos sobre $H0$.

(b) Demuestre el teorema, utilizando el método de suposición de antecedente, combinado con el método de contradicción para demostrar el consecuente.

Otra manera de escribirlo:

$$\begin{array}{ll} \text{H0:} & s \vee \neg w \\ \text{H1:} & \neg t \wedge s \Rightarrow r \\ \text{H2:} & p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \\ \text{H3:} & t \Rightarrow r \\ \hline \therefore & w \vee r \end{array}$$

(a) Un Razonamiento informal para Prueba por casos:

En el caso s, puedo aplicar Modus Ponens con $H1$, pero como no tengo $\neg t$ hago Shunting, pasando $\neg t$ al consecuente. Luego de aplicar Modus Ponens, con $(\neg t \Rightarrow r)$ y H3, concluyo r (como en el ejercicio 8 de la práctica 4 de Sept-Dic 2011). Teniendo r puedo concluir $w \vee r$ por Debilitamiento.

En el caso $\neg w$, uso $H1$ pues es la única hipótesis que tiene a w. La conjunción de $\neg w \wedge p \wedge q$ y la equivalencia en el consecuente de $H1$ sugieren el uso de (3.50) y Contrarrecíproco. Con esto y Modus Ponens obtengo $\neg(x \vee \neg r)$ que con De Morgan y Debilitamiento me queda en r. Nuevamente, debilito a r para obtener $w \vee r$.

(b)Un Razonamiento informal para Contradicción:

Luego de negar la conclusión y usar De Morgan, tengo $\neg w \wedge \neg r$. En la prueba anterior en el caso $\neg w$ ya supe obtener r. Con r y $\neg r$ tengo la contradicción.

4.1. Suponer el Antecedente para estructurar la Demostración, y Prueba por Casos

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$
$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$
$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$
$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso s

s
$\equiv$ $\langle$Neutro $\wedge$ con $p := s\rangle$
$s \wedge true$
$\equiv$ $\langle H1 \equiv true\rangle$
$s \wedge (\neg t \wedge s \Rightarrow r)$
$\equiv$ $\langle$Sim.$\wedge$; Shunting con $p, q := s, \neg t\rangle$
$s \wedge (s \Rightarrow (\neg t \Rightarrow r))$
$\Rightarrow$ $\langle$Modus Ponens con $p, q := s, \neg t \Rightarrow r\rangle$
$(\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv$ $\langle$Neutro $\wedge$ con $p := (\neg t \Rightarrow r)$; Sim.$\wedge$ $\rangle$
$true \wedge (\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv$ $\langle H3 \equiv true\rangle$
$(t \Rightarrow r) \wedge (\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv$ $\langle$(3.79) $(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r$ con $p := t\rangle$
r
$\Rightarrow$ $\langle$(3.76a) Deb/Fort. con $p, q := r, w$; Sim.$\vee$ $\rangle$
$w \vee r$

Caso $\neg w$

$\neg w$
$\equiv$ $\langle$Neutro $\wedge$ con $p := \neg w\rangle$
$\neg w \wedge true$
$\equiv$ $\langle H2 \equiv true\rangle$
$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q))$
$\equiv$ $\langle$Contrarrecíproco con $p, q := x \vee \neg r; (w \equiv p \wedge q)\rangle$
$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$
$\equiv$ $\langle$Asoc.$\wedge$; (3.50) $p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q$ con $p, q := \neg w, p \wedge q$; Sim. $\equiv$ $\rangle$
$\neg w \wedge (\neg w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$
$\equiv$ $\langle$Distr. $\neg$ sobre $\equiv$ con $p, q := w, p \wedge q\rangle$
$\neg w \wedge \neg(w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$
$\Rightarrow$ $\langle$Asoc.$\wedge$; Modus Ponens con $p, q := (\neg(w \equiv p \wedge q), \neg(x \vee \neg r)$; (paridad 0)$\rangle$
$\neg w \wedge \neg(x \vee \neg r)$
$\equiv$ $\langle$De Morgan con $p, q := x, \neg r$; Doble Neg. $\rangle$
$\neg w \wedge (\neg x \wedge r)$
$\Rightarrow$ $\langle$Asoc.$\wedge$; Sim.$\wedge$; (3.76b) Deb/Fort. con $p, q := r, \neg w \wedge \neg x\rangle$
r
$\Rightarrow$ $\langle$(3.76a) Deb/Fort. con $p, q := r, w$; Sim.$\vee$ $\rangle$
$w \vee r$

$\therefore w \vee r$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

4.2. Suponer el Antecedente para estructurar la Demostración, y Contradicción para demostrar el Consecuente (Reducción al Absurdo)

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$

$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$

$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$

$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Por Contradicción

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(w \vee r) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := w, r \rangle \\
 & \neg w \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := \neg w \rangle \\
 & \neg w \wedge true \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & \neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := (x \vee \neg r), (w \equiv p \wedge q) \rangle \\
 & \neg w \wedge p \wedge q \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r)) \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Asoc.} \wedge \text{; (3.50) } p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := \neg w, p \wedge q\text{; Sim.} \equiv \rangle \\
 & \neg w \wedge (\neg w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r)) \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Distr. } \neg \text{ sobre } \equiv \text{ con } p, q := w, p \wedge q \rangle \\
 & \neg w \wedge \neg(w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r)) \wedge \neg r \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Asoc.} \wedge \text{; Modus Ponens con } p, q := \neg(w \equiv p \wedge q), \neg(x \vee \neg r)\text{; (paridad 0)} \rangle \\
 & \neg w \wedge \neg(x \vee \neg r) \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := x, \neg r\text{; Doble Neg.} \rangle \\
 & \neg w \wedge (\neg x \wedge r) \wedge \neg r \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Asoc.} \wedge \text{, Sim.} \wedge \text{, (3.76b) Deb/Fort. con } p, q := r \wedge \neg r, \neg w \wedge \neg x \rangle \\
 & r \wedge \neg r \\
\equiv & \quad \langle \text{Contradicción con } p := r \rangle \\
 & false
\end{array}
$$

$\therefore w \vee r$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- La demostración se reduce a repetir el caso $\neg w$ de la prueba por casos anterior (subsección 4.1).
- Al notar esto, en lugar de escribir todo nuevamente, se pudo hacer un lema con el caso $\neg w$. Esto no era necesario, pero pudo ahorrar tiempo de escritura.
- Al utilizar Modus Ponens o cualquier teorema de debilitamiento/fortalecimiento dentro de expresiones complejas debemos constatar que su aplicación es correcta. Podemos utilizar el Metateorema General de Monotonía y verificar la paridad de la expresión, como lo he hecho en este caso y en la subsección (4.1); o podemos ser más específicos y utililizar los teoremas de Monotonía (4.2) o (4.3), como lo hago en la subsección (4.3). En cualquier caso, debemos elegir una manera de indicar que estamos ante un caso de Monotonía.

4.3. Usando Lemas

Proponemos el *LemaExamen2SD2011*:

$$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \Rightarrow r$$

Prueba partiendo del Antecedente:

$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q))$

$\equiv$ $\langle$Contrarrecíproco con $p, q := (x \vee \neg r), (w \equiv p \wedge q)\rangle$

$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$

$\equiv$ $\langle$Asoc.$\wedge$; (3.50) $p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q$ con $p, q := \neg w, p \wedge q$; Sim. $\equiv$ $\rangle$

$\neg w \wedge (\neg w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$

$\equiv$ $\langle$Distr. $\neg$ sobre $\equiv$ con $p, q := w, p \wedge q\rangle$

$\neg w \wedge \neg(w \equiv p \wedge q) \wedge (\neg(w \equiv p \wedge q) \Rightarrow \neg(x \vee \neg r))$

$\Rightarrow$ $\langle$Asoc.$\wedge$; Sim.$\wedge$; Modus Ponens con $p, q := \neg(w \equiv p \wedge q), \neg(x \vee \neg r)$; Monotonía$\wedge$ $\rangle$

$\neg(x \vee \neg r) \wedge \neg w$

$\equiv$ $\langle$De Morgan con $p, q := x, \neg r$; Doble Neg. $\rangle$

$(\neg x \wedge r) \wedge \neg w$

$\Rightarrow$ $\langle$Sim.$\wedge$; Asoc.$\wedge$; (3.76b) Deb/Fort. con $p, q := r, \neg w \wedge \neg x\rangle$

r

4.3.1. Suponer el Antecedente para estructurar la Demostración, y Contradicción para demostrar el Consecuente (Reducción al Absurdo)

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$

$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$

$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$

$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Por Contradicción

$\neg(w \vee r)$

$\equiv$ $\langle$De Morgan con $p, q := w, r\rangle$

$\neg w \wedge \neg r$

$\equiv$ $\langle$Neutro $\wedge$ con $p := \neg w\rangle$

$\neg w \wedge true \wedge \neg r$

$\equiv$ $\langle H2 \equiv true$; Asoc.$\wedge$ $\rangle$

$\neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \wedge \neg r$

$\Rightarrow$ $\langle LemaExamen2SD2011$, Monotonía$\wedge$ $\rangle$

$r \wedge \neg r$

$\equiv$ $\langle$Contradicción con $p := r\rangle$

$false$

$\therefore w \vee r$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

4.3.2. Suponer el Antecendente para estructurar la Demostración, y Prueba por Casos

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$

$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$

$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$

$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso s

$$
\begin{array}{ll}
 & s \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := s \rangle \\
 & s \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & s \wedge (\neg t \wedge s \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \wedge \text{ ; Shunting con } p, r := s, \neg t \rangle \\
 & s \wedge (s \Rightarrow (\neg t \Rightarrow r)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := s, (\neg t \Rightarrow r) \rangle \\
 & (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := (\neg t \Rightarrow r); \text{ Sim.} \wedge \rangle \\
 & true \wedge (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle H3 \equiv true \rangle \\
 & (t \Rightarrow r) \wedge (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle (3.79)\ (p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r \text{ con } p := t \rangle \\
 & r \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a) \text{ Deb/Fort. con } p, q := r, w; \text{ Sim.} \vee \rangle \\
 & w \vee r
\end{array}
$$

Caso $\neg w$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg w \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := \neg w \rangle \\
 & \neg w \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true; \text{ Asoc.} \wedge \rangle \\
 & \neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \\
\Rightarrow & \quad \langle LemaExamen2SD2011 \rangle \\
 & r \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a) \text{ Deb/Fort. con } p, q := r, w; \text{ Sim.} \vee \rangle \\
 & w \vee r
\end{array}
$$

$\therefore w \vee r$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

Aspectos a resaltar de las Pruebas por Casos:

- En una prueba por casos, la Hipótesis con la que se hacen los casos no se vuelve a considerar dentro de los casos (ya está siendo usada). En vez, se debe buscar cuáles de las otras hipótesis se relacionan con cada caso. Aquí usamos s con H1 y H3; y $\neg w$ con H2.
- En una prueba por casos se busca utilizar la información del caso para alcanzar la conclusión. En esta prueba tanto s como $\neg w$ son utilizados para hacer Modus Ponens.

4.3.3. OTRO ESTILO: Suponer el Antecendente para estructurar la Demostración, y Prueba por Casos

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$

$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$

$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$

$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso s

$$
\begin{array}{ll}
 & s \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := s \rangle \\
 & s \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & s \wedge (\neg t \wedge s \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.} \wedge \text{ ; Shunting con } p, r := s, \neg t \rangle \\
 & s \wedge (s \Rightarrow (\neg t \Rightarrow r)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := s, (\neg t \Rightarrow r) \rangle \\
 & (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := (\neg t \Rightarrow r);\ \text{Sim.} \wedge \ \rangle \\
 & true \wedge (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle H3 \equiv true \rangle \\
 & (t \Rightarrow r) \wedge (\neg t \Rightarrow r) \\
\equiv & \quad \langle (3.79)\ (p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r \text{ con } p := t \rangle \\
 & r \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a)\ \text{Deb/Fort. con } p, q := r, w;\ \text{Sim.} \vee \ \rangle \\
 & w \vee r
\end{array}
$$

$\therefore s \Rightarrow w \vee r$

Caso $\neg w$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg w \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := \neg w \rangle \\
 & \neg w \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true;\ \text{Asoc.} \wedge \ \rangle \\
 & \neg w \wedge p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \\
\Rightarrow & \quad \langle LemaExamen2SD2011 \rangle \\
 & r \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a)\ \text{Deb/Fort. con } p, q := r, w, \text{Sim.} \vee \ \rangle \\
 & w \vee r
\end{array}
$$

$\therefore \neg w \Rightarrow w \vee r$

$$
\begin{array}{ll}
 & (s \Rightarrow w \vee r) \wedge (\neg w \Rightarrow w \vee r) \\
\equiv & \quad \langle\ (3.78)\ \text{Análisis de Casos} \rangle \\
 & s \vee \neg w \Rightarrow w \vee r \qquad \text{— Prueba por Casos de H0}
\end{array}
$$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

Aspectos a resaltar de los Estilos de Demostración:

- Existen diversas maneras de presentarle una demostración al lector. Además de los dos estilos utilizados en esta sección, existen otras variantes para este y para otros métodos de prueba.
- Cada persona puede tener preferencia por un estilo en particular.
- Algunas personas utilizan varios estilos, y los seleccionan dependiendo del público al cual se dirigen, o de los aspectos que deseen resaltar de la prueba, entre otros factores.
- El objetivo de esta guía no es hacer un recorrido por los diferentes estilos, sino por los diferentes métodos de prueba. Queda al lector adaptar el contenido de esta guía al estilo de su interés.
- No debe confundirse estilo con rigurosidad. En *CI2511: Lógica Simbólica* se manejan diferentes estilos, pero en cualquier caso se busca obtener demostraciones correctas, completas, elegantes y formales.

4.4. Alternativa: Suponer el Antecedente para Sustituir Hipótesis por true, y Prueba por Casos

Supongo $H0 : s \vee \neg w \equiv true$
$H1 : \neg t \wedge s \Rightarrow r \equiv true$
$H2 : p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q)) \equiv true$
$H3 : t \Rightarrow r \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso $s \equiv true$

$\neg t \wedge s \Rightarrow r$ — H1
$\equiv \quad \langle$Caso $s \equiv true\rangle$
$\neg t \wedge true \Rightarrow r$
$\equiv \quad \langle$Neutro $\wedge$ con $p := \neg t\rangle$
$(\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv \quad \langle$Neutro $\wedge$ con $p := (\neg t \Rightarrow r)$; Sim.$\wedge$ $\rangle$
$true \wedge (\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv \quad \langle H3 \equiv true\rangle$
$(t \Rightarrow r) \wedge (\neg t \Rightarrow r)$
$\equiv \quad \langle$(3.79) $(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r$ con $p := t\rangle$
r
$\Rightarrow \quad \langle$(3.76a) Deb/Fort. con $p, q := r, w$; Sim.$\vee$ $\rangle$
$w \vee r$

Caso $\neg w \equiv true$

$p \wedge q \wedge (x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv p \wedge q))$ — H2
$\equiv \quad \langle$MetaT. Separación de $\wedge$ *de* $H2 : (p \wedge q \equiv true)$; Sim.$\wedge$; Neutro$\wedge$ $\rangle$
$x \vee \neg r \Rightarrow (w \equiv true)$
$\equiv \quad \langle$Neutro $\equiv$ con $q := w\rangle$
$x \vee \neg r \Rightarrow w$
$\equiv \quad \langle$Doble Neg. ; Caso $\neg w \equiv true\rangle$
$x \vee \neg r \Rightarrow \neg true$
$\equiv \quad \langle$Definición de $false$ $\rangle$
$x \vee \neg r \Rightarrow false$
$\equiv \quad \langle$(3.74) $p \Rightarrow false \equiv \neg p$ con $p := x \vee \neg r\rangle$
$\neg(x \vee \neg r)$
$\equiv \quad \langle$De Morgan con $p, q := x, \neg r$; Doble Neg. $\rangle$
$\neg x \wedge r$
$\Rightarrow \quad \langle$Sim.$\wedge$; (3.76b) Deb/Fort. con $p, q := r, \neg x\rangle$
r
$\Rightarrow \quad \langle$(3.76a) Deb/Fort. con $p, q := r, w$; Sim.$\vee$ $\rangle$
$w \vee r$

$\therefore w \vee r$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow (w \vee r)$ — MDE

Parte II
Otros Exámenes

En las prácticas 4 y 5 de Septiembre-Diciembre 2011 hay preguntas de exámenes de las últimas ediciones del curso. En esta parte revisaremos algunas preguntas interesantes de otros exámenes.

5. Enero-Marzo 2008

Dada la siguiente traducción de un argumento:

$$\begin{array}{ll}
\text{H0:} & (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \\
\text{H1:} & \neg(t \wedge x) \Rightarrow (z \wedge a) \vee y \\
\text{H2:} & ((u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s) \Rightarrow (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y) \\
\text{H3:} & p \vee \neg q \equiv \neg q \\
\hline
\therefore & \neg(t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y)
\end{array}$$

Demuestre que es un teorema suponiendo el antecedente para estructurar la prueba y realizando una prueba por casos de H0. Puede utilizar los teoremas de asociatividad, simetría, doble negación y neutro de la conjunción de manera implícita. Máximo 25 pasos toda la prueba.

Razonamiento informal:

Reconozco que la conclusión es una implicación negada, por lo que con (3.59) y De Morgan se convierte en $(t \wedge x) \wedge \neg((z \wedge a) \vee y)$ es decir, tengo que concluir tanto $(t \wedge x)$ como $\neg((z \wedge a) \vee y)$. Me contengo de seguir aplicando De Morgan a $\neg((z \wedge a) \vee y)$ porque tanto H1 como H2 tienen subexpresiones muy parecidas a ésta y además hay un límite de pasos fijado para la prueba.

En el caso $(p \wedge q)$, utilizo H3 pues es la hipótesis que más se parece al caso. Me río porque de inmediato reconozco que H3 no es más que el famoso teorema (3.32), es decir H3 es $(\neg p \vee \neg q)$ que con De Morgan es $\neg(p \wedge q)$ y esto es el negado del caso, por lo que deduzco $false$. A partir de $false$ puedo concluir cualquier cosa, en particular la complicada conclusión del argumento.

El caso $(r \wedge s)$ luce más complicado. Sé que debo usar H2, pero no es muy claro cómo. No me dejo engañar, sé que en H2 no tengo la estructura de Shunting, y también me doy cuenta que aunque $r \wedge s$ está en el consecuente, no está negado, por lo que Contrarrecíproco no va a ser de utilidad. Por otra parte, no hay más ocurrencias de u ni de v en el argumento, así que no es algo que pueda obtener de otra forma. Me puede ayudar a razonar el utilizar el método de sustituir las hipótesis por $true$. De esta forma veo que cuando $r \wedge s \equiv true$ todo el antecedente de $H2$ es $true$ y por lo tanto de H2 puedo concluir $(\neg(z \wedge a) \wedge \neg y)$. Para explicar esto con el método de suponer el antecedente para estructurar la prueba, recuerdo que la implicación es una disyunción, así que puedo producirla debilitando el caso $r \wedge s$ con $(u \not\equiv w)$ y usando (3.59) para obtener la implicación. Pero en lugar de hacer eso mejor uso (4.1) directamente pues hay un límite de pasos en esta prueba (recuerdo que (4.1) es el "combo" de (3.76a) con (3.59) Definición alterna de implicación). Con eso y $H2$ aplico Modus Ponens y concluyo $(\neg(z \wedge a) \wedge \neg y)$, teniendo la mitad de lo que necesito concluir. Reconozco que $(\neg(z \wedge a) \wedge \neg y)$ es el consecuente negado de H1, por lo que con Contrarrecíproco y (3.66) obtengo $t \wedge x$. Utilizo (3.66) y no Modus Ponens porque voy a necesitar $(\neg(z \wedge a) \wedge \neg y)$ para la conclusión, que la produzco recomponiendo la implicación con De Morgan y (3.59).

Supongo $H0 : (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv true$

$H1 : \neg(t \wedge x) \Rightarrow (z \wedge a) \vee y \equiv true$

$H2 : ((u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s) \Rightarrow (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y) \equiv true$

$H3 : p \vee \neg q \equiv \neg q \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso $p \wedge q$

$$
\begin{array}{ll}
 & p \wedge q \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro}\wedge\ ;\ H3 \equiv true \rangle \\
 & (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q \equiv \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.}\vee\ ;\ (3.32)\ p \vee q\ \equiv p \vee \neg q\ \equiv\ p \text{ con } p, q := \neg q, p;\ \text{Sim.}\vee \rangle \\
 & (p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan} \rangle \\
 & (p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contradicción con } p := p \wedge q \rangle \\
 & false \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.75)\ false \Rightarrow p \equiv true \text{ con } p := \neg(t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y) \rangle \\
 & \neg(t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y)
\end{array}
$$

Caso $r \wedge s$

$$
\begin{array}{ll}
 & r \wedge s \\
\equiv & \quad \langle (4.1)\ p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \text{ con } p, q := r \wedge s, (u \not\equiv w) \rangle \\
 & (u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro}\wedge\ ;\ H2 \equiv true \rangle \\
 & ((u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s) \wedge (((u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s) \Rightarrow (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := ((u \not\equiv w) \Rightarrow r \wedge s), (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y \rangle \\
 & (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro}\wedge\ ;\ H1 \equiv true \rangle \\
 & (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y) \wedge\ \ (\neg(t \wedge x) \Rightarrow (z \wedge a) \vee y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contrarrecíproco con } p, q := \neg(t \wedge x), ((z \wedge a) \vee y);\ \text{Doble Neg.} \rangle \\
 & (\neg(z \wedge a) \wedge \neg y) \wedge\ \ (\neg((z \wedge a) \vee y) \Rightarrow (t \wedge x)) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := (z \wedge a), y \rangle \\
 & \neg((z \wedge a) \vee y) \wedge (\neg((z \wedge a) \vee y) \Rightarrow (t \wedge x)) \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := \neg((z \wedge a) \vee y), (t \wedge x) \rangle \\
 & \neg((z \wedge a) \vee y) \wedge (t \wedge x) \\
\equiv & \quad \langle \text{Sim.}\wedge\ ;\ \text{Doble Neg.}\ ;\ \text{De Morgan con } p, q := \neg(t \wedge x), ((z \wedge a) \vee y) \rangle \\
 & \neg(\neg(t \wedge x) \vee ((z \wedge a) \vee y)) \\
\equiv & \quad \langle (3.59)\ \text{Def. Alt.Implic. con } p, q := (t \wedge x), ((z \wedge a) \vee y) \rangle \\
 & \neg\ (t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y)
\end{array}
$$

$\therefore \neg(t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y)$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow \neg(t \wedge x \Rightarrow (z \wedge a) \vee y)$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Se debe dedicar algunos minutos a analizar el argumento antes de comenzar una demostración. En este caso fue importante comprender la expresión de la conclusión para poder construirla en el caso $r \wedge s$.

- En una prueba por casos, la Hipótesis con la que se hacen los casos no se vuelve a considerar dentro de los casos (ya está siendo usada). En vez, se debe buscar cuáles de las otras hipótesis se relacionan con cada caso. Aquí usamos $p \wedge q$ con H3; y $r \wedge s$ con H2 y H1.

- En una prueba por casos se busca utilizar la información del caso para alcanzar la conclusión. En esta prueba $p \wedge q$ se requería para lograr una contradicción, mientras que $r \wedge s$ fue utiliza para hacer Modus Ponens.

- El teorema (4.1) puede ser visto como un "combo" de (3.76a) y (3.59).

- Al hallar una contradicción se puede concluir cualquier cosa, a nuestra conveniencia. El teorema (3.75) $false \Rightarrow p \equiv true$ puede ser visto con el Metateorema (3.7) como que el teorema $false \Rightarrow p$ es equivalente al teorema $true$. En la demostración utilizamos $false \Rightarrow p$, siendo p la conclusión del argumento.

- Se usa Modus Ponens cuando no se requiere más de la expresión del antecedente de una implicación. Se usa (3.66) cuando la expresión del antecedente es necesaria para continuar la prueba (en nuestro caso se necesita conservar a $\neg((z \wedge a) \vee y)$ para construir la conclusión). Con frecuencia los estudiantes no pueden finalizar una demostración debido a que en algún momento debilitaron una expresión que contenía información relevante.

- Cuando la conclusión es una conjunción, se debe deducir ambos operandos de la conjunción.

- Se puede obtener implicaciones a partir de disyunciones utilizando el teorema (3.59) Definición Alterna de la Implicación.

- La dificultad de la prueba estaba sólo la complejidad de las subexpresiones. Es importante adquirir la habilidad de reconocer patrones de teoremas aun en expresiones complejas.

- Es fundamental conocer y respetar la precedencia de los operadores.

- Muchos paréntesis pueden hacer confusas las expresiones. Utilizar colores o remarcar el inicio y fin de las expresiones puede ayudar a evitar errores.

- No debemos intimidarnos por la complejidad de las subexpresiones. La manera de abordar esta prueba fue igual que la utilizada en otros ejercicios.

- La prueba requirió apenas 14 de los 25 pasos establecidos como máximo. La dificultad de una demostración a veces es consecuencia de decisiones inadecuadas tomadas por la persona que la realiza.

6. Septiembre-Diciembre 2007

Dada la siguiente traducción de un argumento:

$$\begin{array}{ll} \text{H0:} & (\neg s \wedge p) \vee \neg t \\ \text{H1:} & (p \vee \neg s) \wedge z \Rightarrow z \wedge y \\ \text{H2:} & (r \vee \neg t \equiv \neg(t \wedge r)) \Rightarrow w \\ \text{H3:} & \neg(z \Rightarrow y) \\ \text{H4:} & w \Rightarrow (x \not\equiv w) \\ \hline \therefore & \neg x \vee z \end{array}$$

Demuestre que es un teorema suponiendo el antecedente para estructurar la prueba y realizando una prueba por casos de H0. Puede utilizar los teoremas de asociatividad, simetría, doble negación de manera implícita.

6.1. Una Demostración Típica

Supongo $H0 : (\neg s \wedge p) \vee \neg t \equiv true$
$H1 : (p \vee \neg s) \wedge z \Rightarrow z \wedge y \equiv true$
$H2 : (r \vee \neg t \equiv \neg(t \wedge r)) \Rightarrow w \equiv true$
$H3 : \neg(z \Rightarrow y) \equiv true$
$H4 : w \Rightarrow (x \not\equiv w) \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso $\neg s \wedge p$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg s \wedge p \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{(3.76c) Deb/Fort. con } p, q := \neg s, p;\ \text{Sim.}\vee \rangle \\
 & p \vee \neg s \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := p \vee \neg s \rangle \\
 & (p \vee \neg s) \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H1 \equiv true \rangle \\
 & (p \vee \neg s) \wedge ((p \vee \neg s) \wedge z \Rightarrow z \wedge y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Shunting con } p, q, r := p \vee \neg s, z, z \wedge y \rangle \\
 & (p \vee \neg s) \wedge ((p \vee \neg s) \Rightarrow (z \Rightarrow z \wedge y)) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := (p \vee \neg s), (z \Rightarrow z \wedge y) \rangle \\
 & z \Rightarrow z \wedge y \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Sim.}\wedge\text{ ; (3.76b) Deb/Fort. con } p, q := y, z \text{ (paridad 0)} \rangle \\
 & z \Rightarrow y \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := z \Rightarrow y \rangle \\
 & (z \Rightarrow y) \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H3 \equiv true \rangle \\
 & (z \Rightarrow y) \wedge \neg(z \Rightarrow y) \\
\equiv & \quad \langle \text{Contradicción con } p := (z \Rightarrow y) \rangle \\
 & false \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{(3.75) } false \Rightarrow p \equiv true \text{ con } p := \neg x \vee z \rangle \\
 & \neg x \vee z
\end{array}$$

Caso $\neg t$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg t \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := \neg t \rangle \\
 & \neg t \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H2 \equiv true \rangle \\
 & \neg t \wedge (r \vee \neg t \equiv \neg(t \wedge r)) \Rightarrow w) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan}\,;\text{con } p, q := t, r;\ \text{Sim.}\vee \rangle \\
 & \neg t \wedge ((\neg t \vee r \equiv \neg t \vee \neg r) \Rightarrow w) \\
\equiv & \quad \langle (3.32)\ p \vee q \ \equiv p \vee \neg q \ \equiv \ p \text{ con } p, q := \neg t, r \rangle \\
 & \neg t \wedge (\neg t \Rightarrow w) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Modus Ponens con } p, q := \neg t, w \rangle \\
 & w \\
\equiv & \quad \langle \text{Neutro} \wedge \text{ con } p := w \rangle \\
 & w \wedge true \\
\equiv & \quad \langle H4 \equiv true \rangle \\
 & w \wedge (w \Rightarrow (x \not\equiv w)) \\
\equiv & \quad \langle (3.66)\ p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := w, x \not\equiv w \rangle \\
 & w \wedge (x \not\equiv w) \\
\equiv & \quad \langle (3.14)\ (p \not\equiv q) \equiv \ \neg p \equiv q \text{ con } p, q := x, w \rangle \\
 & w \wedge (\neg x \equiv w) \\
\equiv & \quad \langle (3.50)\ p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q \text{ con } p, q := w, \neg x \rangle \\
 & w \wedge \neg x \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{Sim.}\wedge\ ;\ (3.76b)\ \text{Deb/Fort. con } p, q := \neg x, w \rangle \\
 & \neg x \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a)\ \text{Deb/Fort. con } p, q := \neg x, z \rangle \\
 & \neg x \vee z
\end{array}
$$

$\therefore \neg x \vee z$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \wedge H4 \Rightarrow \neg x \vee z$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- En una prueba por casos, la Hipótesis con la que se hacen los casos no se vuelve a considerar dentro de los casos (ya está siendo usada). En vez, se debe buscar cuáles de las otras hipótesis se relacionan con cada caso. Aquí usamos $\neg s \wedge p$ con H1 y H3; y $\neg t$ con H2 y H4.
- Cuando la conclusión es una disyunción, basta con alcanzar uno de los operandos de la disyunción, puesto que por debilitamiento se puede concluir la disyunción. En este ejemplo, una vez obtenido $\neg x$ en el caso $\neg t$, concluimos $\neg x \vee z$ por (3.76a) Deb/Fort. De manera similar finalizamos las pruebas por casos de la sección (4).
- Cuando se hace un debilitamiento o fortalecimiento que no es obvio, es importante chequear la paridad de la expresión e indicarla en consideración a los estimados lectores de la prueba. En nuestro ejemplo la subexpresión a debilitar está solamente en un consecuente (sin negaciones ni antecedentes), por lo que la paridad es cero y el sentido del teorema (3.76b) se mantiene.

6.2. Una Demostración Astuta

Proponemos el *LemaExamen2SD2007*:

$\neg(z \Rightarrow y) \Rightarrow \neg x \vee z$

Prueba por el Método Abreviado Debilitamiento

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(z \Rightarrow y) \\
\equiv & \quad \langle (3.59) \text{ Def. Alt.Implic. con } p, q := z, y \rangle \\
 & \neg(\neg z \vee y) \\
\equiv & \quad \langle \text{De Morgan con } p, q := \neg z, y; \text{ Doble Neg. } \rangle \\
 & z \wedge \neg y \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76b) \text{ Deb/Fort. con } p, q := z, \neg y \rangle \\
 & z \\
\Rightarrow & \quad \langle (3.76a) \text{ Deb/Fort. con } p, q := z, \neg x; \text{ Sim.} \vee \rangle \\
 & \neg x \vee z
\end{array}
$$

Prueba del teorema:

Supongo $H0 : (\neg s \wedge p) \vee \neg t \equiv true$

$H1 : (p \vee \neg s) \wedge z \Rightarrow z \wedge y \equiv true$

$H2 : (r \vee \neg t \equiv \neg(t \wedge r)) \Rightarrow w \equiv true$

$H3 : \neg(z \Rightarrow y) \equiv true$

$H4 : w \Rightarrow (x \not\equiv w) \equiv true$

Prueba por casos de H0

Caso $\neg s \wedge p$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(z \Rightarrow y) \text{ — H3} \\
\Rightarrow & \quad \langle LemaExamen2SD2007 \rangle \\
 & \neg x \vee z
\end{array}
$$

Caso $\neg t$

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(z \Rightarrow y) \text{ — H3} \\
\Rightarrow & \quad \langle LemaExamen2SD2007 \rangle \\
 & \neg x \vee z
\end{array}
$$

$\therefore \neg x \vee z$

$\therefore H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \wedge H4 \Rightarrow \neg x \vee z$ — MDE

Aspectos a resaltar de esta prueba:

- Ya habíamos realizado la traducción de una implicación negada en las secciones (1.2.5) y (5).
- La dificultad de una demostración a veces es consecuencia de decisiones inadecuadas tomadas por la persona que la realiza. Se debe dedicar algunos minutos a analizar el argumento antes de comenzar con una prueba típica.
- Este es un caso atípico en que una sóla hipótesis (H3) permite demostrar la expresión. Sin embargo, igualmente podemos concluir que $H0 \wedge H1 \wedge H2 \wedge H3 \wedge H4 \Rightarrow \neg x \vee z$.
- Queda al lector buscar otras demostraciones astutas para los ejercicios de esta guía y de las guías de práctica.